ECOLE DE L'AIR 1977 ×I37×

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Durée : 3 heures - Coefficient : 9)

Toutes les matrices considérées dans le problème appartiennent à l'ensemble E des matrices carrées d'ordre n , à éléments réels; n (n ⩾ 2) est quelconque mais fixé une fois pour toutes dans tout le problème.

I désigne la matrice unité, $\|0\|$ la matrice nulle de E .

Les résultats de la première partie n'interviennent pas dans les deuxième, troisième et quatrième parties.

PREMIERE PARTIE

1.- p et q étant 2 réels quelconques, on considère l'équation matricielle

$$X^2 + pX + qI = \|0\|,$$

X étant une matrice de E .

a) Montrer que si $p^2 - 4q > 0$, chercher toutes les solutions de l'équation revient à chercher toutes les solutions de l'équation $Y^2 = I$

b) Montrer que si $p^2 - 4q > 0$ l'équation a au moins 2 solutions.

2.- Soit A une matrice de E :

- vérifiant $A^2 + pA + qI = \|0\|$, avec $p^2 - 4q > 0$
- telle que A et I forment un système libre dans l'espace vectoriel E .

Soit E_1 le sous espace de E engendré par A et I (donc formé des matrices $\lambda A + \mu I$).

Montrer qu'il y a dans E_1 quatre matrices distinctes égales à leur carré, I, $\|0\|$, et deux matrices qu'on appellera U et V.

Calculer U.V , V.U .

En déduire que U et V forment un système libre de E_1 .

3.- En prenant U et V comme base de E_1 , montrer que E_1 avec les 2 opérations internes de E (addition, multiplication des matrices) est isomorphe à l'anneau produit $\mathbb{R}^2$ (c'est-à-dire défini sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par les 2 lois produit $(\mathbb{R}, +) \times (\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}, .) \times (\mathbb{R}, .)$.
Quelles sont les matrices inversibles de E_1 ?

.../...

DEUXIEME PARTIE

×I38×

On rappelle que dans l'anneau $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels, tout idéal est principal, c'est-à-dire formé par l'ensemble des polynômes multiples d'un polynôme qu'on peut choisir normalisé (c'est-à-dire dont le coefficient du terme de plus haut degré vaut 1) et qu'on appellera générateur normalisé de l'idéal.

Soit Q un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

On désignera (suivant l'usage) pour $x \in \mathbb{R}$:

$$Q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

On désignera par $Q(A)$:

$$Q(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_n A^n \quad ,$$

A étant une matrice de E.

Si $Q(A) = \|0\|$, on dira que A est une racine matricielle du polynôme Q.

Remarque : On pourra, pour les questions 1 et 2 ci-dessous, utiliser une transformation définie par A.

1.- Montrer que, si $Q(A) = \|0\|$, pour toute matrice A' semblable à A, $Q(A') = \|0\|$.

2.- Montrer que si λ est valeur propre de A :

$$Q(A) = \|0\| \Longrightarrow Q(\lambda) = 0$$

3.- Soit A une matrice quelconque de E, $A \neq \|0\|$.

Soit m un entier non nul ($m \in \mathbb{N}^*$) tel que $I, A, A^2, \ldots, A^m$ forment un système libre de l'espace vectoriel E.

Montrer que l'ensemble de ces entiers est majoré dans $\mathbb{N}$.

En déduire que toute matrice non nulle de E est racine matricielle d'au moins un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

4.- Montrer que $A \neq \|0\|$ étant une matrice de E, l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ admettant A comme racine matricielle forme un idéal de $\mathbb{R}[X]$. Cette matrice définit donc un polynôme normalisé unique, générateur de cet idéal. On le désignera par P_A.

... / ...

TROISIEME PARTIE

Soient A_o, A_1, A trois matrices de E telles que :

$$A_1.A = A.A_1 \quad \text{et} \quad A_o.A = A.A_o \ .$$

Montrer que si B_o, B_1, ... , B_p , C_o, C_1, ... , C_{p+1} sont des matrices quelconques de E vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (A_o + x\,A_1) \cdot (B_o + x\,B_1 + \ldots + x^p\,B_p)$$

$$= C_o + x\,C_1 + \ldots + x^p\,C_p + x^{p+1}\,C_{p+1}$$

on a aussi :

$$(A_o + A.A_1) \cdot (B_o + A.B_1 + A^2.B_2 + \ldots + A^p.B_p)$$

$$= C_o + A.C_1 + A^2.C_2 + \ldots + A^{p+1}.C_{p+1}$$

On suppose de plus que :

$$A_o + A.A_1 = \|0\|$$

A tout réel x , on fait correspondre la matrice de E :

$$M(x) = A_o + x\,A_1 \ .$$

Soit $M_1(x)$ la matrice dont l'élément (ligne i, colonne j) est le cofacteur de l'élément (ligne j, colonne i) du déterminant de $M(x)$.

On rappelle que :

$$M(x).M_1(x) = \left[\det M(x)\right] I \ .$$

Posons : $Q(x) = \det\,(A_o + x\,A_1)$.

Déduire des résultats précédents :

$$Q(A) = \|0\|$$

QUATRIEME PARTIE

Soit A une matrice quelconque de E , $A \neq \|0\|$

Soit $D(x) = \det\,(A - x\,I)$.

En remarquant que A vérifie évidemment :

$$A + A.(-I) = \|0\| \quad ,$$

déduire des résultats de la partie précédente :

$$D(A) = \|0\|$$

P_A étant le polynôme défini dans la deuxième partie, montrer que $D(x)$ et $P_A(x)$ ont les mêmes racines réelles.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail